

# 卒業論文

## 万有引力定数の測定 ～ 現代宇宙論の理解へ向けて～

平成30年2月13日

京都教育大学 理科領域専攻  
学籍番号 141182

大川 賢悟

## 研究背景

京都教育大学では以前よりキャベンディッシュ装置があったものの、その装置を使い万有引力定数を測定することには成功しておらず、さらには使用方法もよく分かっていなかったために数年前に誤って壊してしまっていた。キャベンディッシュ装置とは、イギリスの物理学者ヘンリー・キャベンディッシュが 1797 年から 1798 年にかけて行った地球の密度を測定する実験で用いた実験装置である。キャベンディッシュ本人は万有引力定数を求めたわけではなかったが、この実験の結果から万有引力定数が算出できるため、万有引力定数の測定はキャベンディッシュの功績とされている。万有引力定数は極微小な値であり、これを 230 年も昔に今日の測定値と比較しても数パーセントの誤差という精度で測定することに成功していたことに驚き興味を持った。当時キャベンディッシュが作った装置は 150kg もの鉛球を 2 つも利用するとても大掛かりなものであったが、現在では島津理化器械株式会社がとてもコンパクトに改良したものを定価 32 万円で販売している。もともと京都教育大学にあったキャベンディッシュ装置は壊れていたこともあり、中古品を高嶋先生が見つけて 7 万円ほどで購入して下さったため、それを利用して私もキャベンディッシュと同様に万有引力定数を測定してみることにした。

近年、物理学の中でもホットな話題として宇宙論がある。2011 年に『遠方の超新星の観測を通じた宇宙の加速膨張の発見』、2017 年には『LIGO 検出器および重力波の観測への大きな貢献』が認められノーベル物理学賞を受賞している事からも注目されていることが分かる。特に、2015 年に LIGO で重力波が初めて観測されたことは当時ニュースなどでよく見聞きしていて、「重力波って何なの?」「そんなものどうやって観測したんだろう?」などといった疑問を抱き関心を持っていた。調べてみると、重力波とは質量をもった物体が軸対称ではない運動をすることで時空のゆがみが光速で伝わるものであり、1916 年にアインシュタインが一般相対性理論によりその存在を予測していたことが分かった。しかし、重力波による効果は極めて小さく直接的な観測は困難であるとされていた。

# 目次

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>5</b>
1.1	概要	5
1.2	万有引力定数について	6
1.3	測定の困難さ	6
1.4	現在の万有引力定数測定	7
1.4.1	現在の測定値と測定精度	7
1.4.2	レーザー干渉計を用いた測定	7
1.4.3	原子干渉計を用いた測定	7
1.5	装置とその他使用器具について	8
1.5.1	キャベンディッシュ装置	8
1.5.2	装置の構造	9
1.5.3	吊り線	10
1.5.4	スクリーン	10
1.5.5	レーザー装置	10
1.5.6	レーザー距離計	10
1.5.7	電子天秤	11
1.5.8	ノギス	11
<b>2</b>	<b>万有引力定数の測定</b>	<b>12</b>
2.1	キャベンディッシュ装置の設置	12
2.2	ねじり秤の調整と吊り線の取り付け	12
2.2.1	角度調節の正しい方法	13
2.3	ねじり秤について	14
2.3.1	剛体回転	14
2.3.2	ねじれ振動	14
2.4	最終変位法	16
2.4.1	オプチカルレバーの原理	18
2.5	遠い側の大鉛球による万有引力 $f$ の影響	18
2.6	振動周期 $T$ の測定方法	20
2.6.1	誤った方法	20
2.6.2	正しい方法	20
2.7	その他各種測定	20
2.7.1	大小の鉛球間の距離 $b$	20
2.7.2	ねじり秤の腕の長さ $d$	21
2.7.3	輝点の移動量 $S$	21
2.7.4	大鉛球の質量 $M$	21
2.7.5	凹面鏡からスクリーンまでの距離 $L$	21

<b>3</b>	<b>結果と試行錯誤</b>	<b>22</b>
3.1	誤った周期測定での測定結果 . . . . .	22
3.2	距離 $b$ の補正 1 . . . . .	22
3.3	正確な周期測定での測定結果 . . . . .	23
3.4	距離 $L$ の補正 . . . . .	24
3.5	装置の不具合 . . . . .	25
3.5.1	ケース面の修理 . . . . .	25
3.5.2	凹面鏡の角度調整 . . . . .	25
3.5.3	装置修理後の測定 . . . . .	26
3.6	鉛球支持管の影響 . . . . .	26
<b>4</b>	<b>まとめ</b>	<b>27</b>
<b>5</b>	<b>現代宇宙論の理解へ向けて</b>	<b>28</b>
5.1	重力波検出について . . . . .	28
5.2	万有引力定数と現代宇宙論 . . . . .	28
<b>6</b>	<b>謝辞</b>	<b>29</b>

## 目 次

1	万有引力実験器 GN-10	8
2	構造	9
3	スクリーン	10
4	吊り線の取り換え	12
5	オイルダンパー	12
6	角度調節	13
7	最終変位法	16
8	ねじり秤	16
9	オプティカルレバーの原理	18
10	万有引力 $f$ の影響	18
11	輝点の時間-位置グラフ	23
12	距離 $L$ の補正	24
13	ケース修理前	25
14	ケース修理後	25
15	凹面鏡の角度調整	25

## 表 目 次

1	測定結果 1	22
2	測定結果 1 での距離 $b$ の補正結果	22
3	ねじれ振動による時間と輝点の位置関係	23
4	正確な周期測定の結果	24
5	距離 $L'$ への補正	24
6	装置修理後の測定	26

# 1 序論

## 1.1 概要

キャベンディッシュ装置を利用して万有引力定数の測定をすることが本研究の目的である。キャベンディッシュ装置は、もともと電気力や磁気力などの測定のためにクーロンが発明したねじり秤を利用して、万有引力の大きさを求めるものである。

キャベンディッシュ装置を用いて万有引力定数を測定する際、最も重要だと考えられるのは、測定値に含まれる系統誤差の原因を探ることである。実際に本研究の初期段階では、測定によって得られた万有引力定数の値が現在知られている測定値と比較して 20 % 以上大きかった。

得られた測定結果をもとに、各種測定値の補正などを行った。さらに、装置自体の不具合を探り、修理を行うなどして測定値に含まれる系統誤差の原因を解明するとともに、真値との差 10 % 以内の測定を目指した。

## 1.2 万有引力定数について

万有引力定数とは、基礎物理定数のひとつであり、アイザック・ニュートンの万有引力の法則やアルベルト・アインシュタインの一般相対性理論におけるアインシュタイン方程式で導入されている引力の比例定数である。

$$\text{万有引力の法則} : F = G \frac{Mm}{r^2}$$

万有引力の法則とは、「2つの物体に働く引力の大きさはその質量の積に比例し、物体間の距離の2乗に反比例する」というものである。

$$\text{アインシュタイン方程式} : G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{c^4} GT_{\mu\nu}$$

アインシュタイン方程式では、質量をもった物体が存在すると時空にゆがみが生じ、その物体が運動をすることで、時空のゆがみが空間へと伝わっていくことを示している。これが重力波と呼ばれるものである。

## 1.3 測定の困難さ

地球上での重力をもとにして万有引力定数を概算する。地球の半径はおよそ 6000 km ( $6 \times 10^8$  cm) であるから、体積は約  $1 \times 10^{27}$  cm<sup>3</sup> となる。地球の平均密度をおよそ 6 g/cm<sup>3</sup> と仮定すると地球の全質量は約  $6 \times 10^{27}$  g となる。万有引力定数を G、重力加速度を 10<sup>3</sup> cm/s<sup>2</sup> とし、地球上にある質量 m の物体に加わる引力の大きさを計算すると

$$\frac{Gm6 \times 10^{27}}{(6 \times 10^8)^2} = 10^3 \times m$$

$$\therefore G \approx 6 \times 10^{-8} \text{ (dyn cm}^2/\text{g}^2)$$

となる。これは非常に小さな値である。本実験ではおよそ 4.6 cm 離れた距離にある質量 16 g の小鉛球と質量 1480 g の大鉛球の間に働く万有引力 F の大きさを測定するが、F の大きさを概算した G で概算すると約 10<sup>-4</sup> dyn、重量に直すと 100 万分の 1 g となり、実測にはとても感度の高い仕組みが必要となる。

## 1.4 現在の万有引力定数測定

### 1.4.1 現在の測定値と測定精度

本研究では、万有引力定数の真値として CODATA2014 推奨値を参考とした。

$$\text{CODATA2014 推奨値 } G = 6.67408 \times 10^{-11} \text{ (m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}\text{)}$$

$$\text{標準不確かさ } 0.0031 \times 10^{-11} \text{ (m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}\text{)}$$

つまり、現在の最新技術でもって、その測定精度は 4 桁である。非常に精度が高いように思うのだが、基礎物理定数の中では比較的測定精度が低い方である。

### 1.4.2 レーザー干渉計を用いた測定

レーザー干渉計では、レーザー光の干渉を利用する。自由落下する物体にレーザー光を照射し、レーザー光の干渉によってできる干渉縞の数を数えることで、物体の落下距離と落下時間を測定し得られた重力加速度から万有引力定数を精度よく測定することができる。

### 1.4.3 原子干渉計を用いた測定

原子干渉計では、重力加速度の大きさを  $10^{-9}$  の精度で測定することができる。原子干渉計を用いた高感度の重力加速度計を利用して自由落下する原子の重力加速度を測定することで、万有引力定数の高精度測定が可能となっている。この方法はレーザー干渉計を用いた方法よりも高精度である。



## 1.5 装置とその他使用器具について

### 1.5.1 キャベンディッシュ装置

キャベンディッシュ装置とはイギリスの物理学者ヘンリー・キャベンディッシュが1797年から1798年にかけて行った地球の密度を測定する実験で用いた実験装置である。もともとは天文学者のジョン・ミッチェルによって作成されたものであるが、実験を成功させずに亡くなってしまったため、キャベンディッシュが後を引き継ぎ装置を改造して実験を成功させた。また、装置に用いられているねじり秤はクーロンが発明したものである。キャベンディッシュ本人は万有引力定数を求めたわけではなかったが、この実験の結果から万有引力定数が算出できるため、万有引力定数の測定はキャベンディッシュの功績とされ、装置自体にもキャベンディッシュ装置という名がつけられた。

本研究では、島津理化器械株式会社の万有引力実験器 GN-10（キャベンディッシュ装置）を用いた。キャベンディッシュ装置を改良・小型化したもので、演示実験、学生・生徒実験用として開発されたものである。

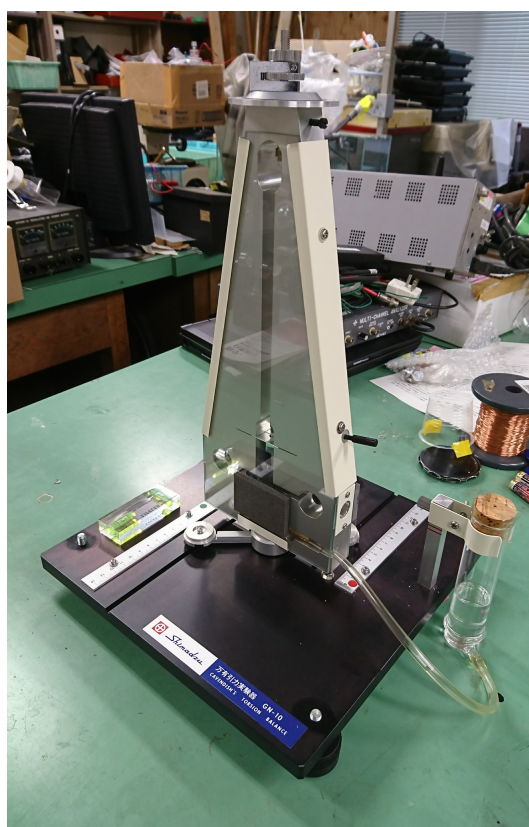


図 1: 万有引力実験器 GN-10

## 1.5.2 装置の構造

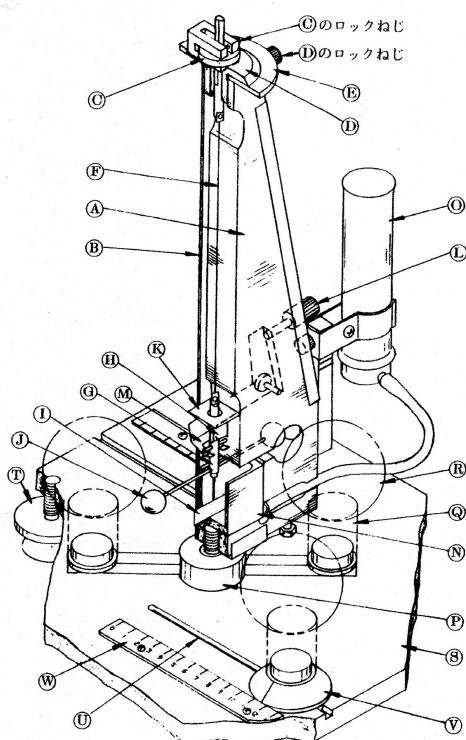


図 2: 構造

ねじり秤はアルミニウム製のケース ① とケース面（ガラス面）② によって囲まれている。頂部にねじり秤の上下調節ナット ③ と、角度調節器 ④、角度目盛板 ⑤ がついている。吊り線 ⑥ については、後述する。腕の長さが 5.0 cm で質量 16 g の小鉛球 ⑦ が取り付けられたダンベル型おもり ⑧ が吊り線で吊っており、回転軸には凹面鏡 ⑨ と制動版 ⑩ がついている。ねじり秤は仕切り板 ⑪ を通している。仕切り板が付いている理由はよくわかってないが、吊り線の取り換えの際に、ねじり秤が固定され、取り換えが容易であった。ケース側面のつまみ ⑫ を回すとフォーク ⑬ が上下し、ダンベル型おもりを固定したり自由にしたたりできる。実験中以外は固定しておかなければならない。ケース内下部にはダンパーそう ⑭ があり、隣接されている制動油の入った油溜め ⑮ を上下させることで、ダンパーそうへの制動油の出し入れを行うことができる。ダンパーそうへ制動油を入れると制動板が制動油に浸かり、ねじり秤の振動を比較的速やかに静めることができる。ケース外下部には鉛球旋回台 ⑯ があり、鉛球支持管 ⑰ と併用して大鉛球 ⑱ を乗せて実験を行う。装置はアルミニウム製のベース ⑲ に固定されていて、ベースの下には調節足 ⑳ が付いている。ベース上面にはチャンネル㉑があり、スライダ ㉒ をはめ鉛球支持管を併用して大鉛球を乗せることができ、逆二乗の法則の検証に用いることができる。逆二乗の法則の検証では、大小の鉛球間の距離をスライダー用目盛板㉓で測る。

### 1.5.3 吊り線

前述したように、本実験では極めて微弱な力を測定するため、感度を極めて高める必要がある。ねじり秤を利用するキャベンディッシュ装置ではねじり秤のねじり剛性率  $c$  が小さいほど、つまり、ねじり秤の振動周期が長いほどその感度が高くなる。よって、ねじり秤のねじり剛性率を決める吊り線の細さ・薄さ（吊り線はリボン状の金属線である）が重要である。本実験で用いた吊り線は、リン青銅でできていて、長さが約 20 cm で、幅 0.15 mm、厚さ 0.01 mm と極めて細く・薄くできている。実際に、ねじり秤の振動周期を測定するとおよそ 10 分ほどでとてもゆっくりと振動していて、感度が極めて高いことが分かる。そのため、操作を誤ると簡単に切れてしまう。実際に、本実験の準備段階でねじり秤の高さ調節をしている際に誤って 1 本切ってしまった。吊り線 1 本の値段は約 9,000 円である。このような吊り線を制作する技術により、キャベンディッシュ装置の小型化が可能となっている。

### 1.5.4 スクリーン

スクリーンは、脚付きホワイトボードに 1 m 物差しを磁石で張り付けたものを使用した。物差しの測定限度は 1 mm である。

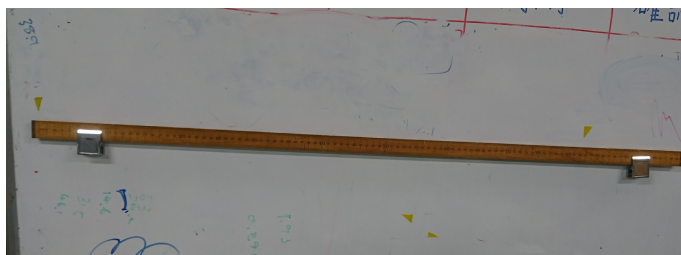


図 3: スクリーン

### 1.5.5 レーザー装置

レーザーは、島津理化器機株式会社の教育用レーザー装置を専用のレーザー光学台へ乗せて利用した。水平器を利用してレーザー装置を水平にしレーザーをキャベンディッシュ装置へ照射したところ、ちょうど凹面鏡に入射したため、高さを調節する必要はなかった。

### 1.5.6 レーザー距離計

凹面鏡からスクリーンまでの距離の測定には、ボッシュ電動工具のレーザー距離計 GLM 7000 を使用した。最大測定距離は 70 m、測定限度は  $\pm 1.5$  mm である。

### 1.5.7 電子天秤

大鉛球などの質量の測定には、ザルトリウス株式会社の電子天秤 TE6101-L を使用した。秤量は 6.1 kg、読み取り限度は 0.1 g である。

### 1.5.8 ノギス

大小の鉛球直径、ケースの厚みやねじり秤の腕の全長などの測定にはノギスを使用した。測定限度は 0.05 mm である。

## 2 万有引力定数の測定

### 2.1 キャベンディッシュ装置の設置

本研究はキャベンディッシュ装置の設置から始まった。本実験器の要となるねじり秤は感度が極めて高いため、実験中の振動をできるだけ軽減する必要がある、制振台の上のせて使用することが推奨されている。しかし、本研究室にはそのような設備は存在しなかったため、比較的高重量の木製の机の上に置くことにした。

水平器を用いてベース下部の調節足を回してベースを水平にした後、試しにねじり秤を自由にしてみると、始めは上下に細かく振動していたが、しばらくするとほとんど上下に振動することなくねじれ振動をしたため、問題なく実験が可能であると判断した。

### 2.2 ねじり秤の調整と吊り線の取り付け

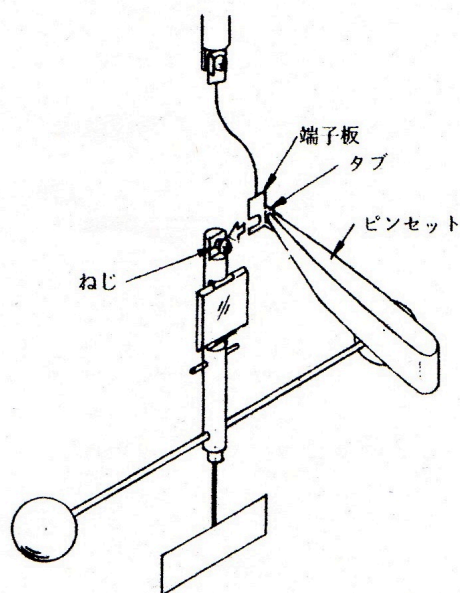


図 4: 吊り線の取り換え

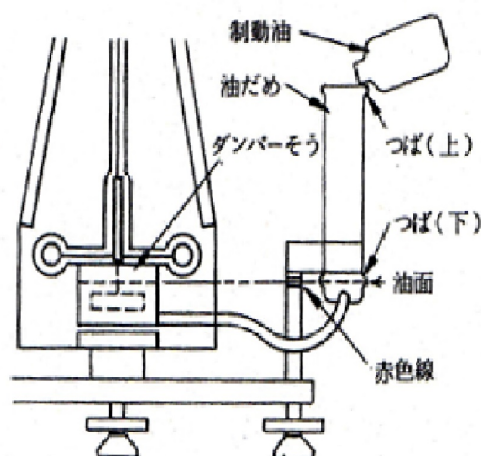


図 5: オイルダンパー

実験を行うには、小鉛球がケース面にぶつかることなく自由に振動をする必要がある。しかし、初期の状態では、ねじり秤の角度調節がうまくされておらず、いつまでも小鉛球がケース面にぶつかり続けてしまっていた。そのため、ねじり秤の角度調節をすることにした。ケース上部にはねじり秤の角度調節器と上下調節ナットがあるが、誤って上下調節ナットを回してしまい、無理にねじり秤を上昇させたために吊り線が切れてしまった。予備の吊り線が1本だけあったので吊り線の取り換えを行った。

吊り線は両端に端子板がついていて、ケース上部とねじり秤にねじ止めにより固定されている。まずは、プラスドライバーを用いて切れてしまった吊り線を取り外した。次に、新しい吊り線を取り付けるのだが、吊り線はリボン状をしているため、ねじれた状態でねじり秤に取り付けてしまうとねじり秤を自由にしたときに負荷が大きくなり切れてしまう。そのため、ねじれることなくつ折り付けを行うことが重要である。予備の吊り線は箱に固定されて入っていたため、その向きのまま取り付ければねじれることはないと考え、図のようにピンセットでタブを挟んで慎重に取り付けた。吊り線の交換後、フォークを下ろしねじり秤を自由してみたが切れることはなくねじれ振動をしていた。

次に、角度調節を行った。図のように、レーザー光を凹面鏡に反射させ、スクリーンに輝点を映す。ねじり秤を自由にすると、始めはケース面にぶつかりながら振動をするが、スクリーン上の輝点もそれに合わせて、一定の範囲内を往復するので、スクリーン上での輝点の振動限界とその中心を記録する。その後、油溜めを上げてダンパーそうに制動油を入れることで、ねじり秤を速やかに静止させる。(ねじり秤が静止したかどうかは、輝点が静止したと判断した時点での輝点の位置を記録し、10分後に再度輝点の位置を確認し、同じ位置に輝点があれば静止したと判断する。)スクリーン上での輝点が静止した位置を確認したところ、振動限界の中心からは大幅にずれていたため、ずれを少なくする向き(輝点が振動限界の中心より右側で静止したため反時計回り)に角度調節器を回した。このとき、特に計算することなく試しに数十度回して、輝点が静止するのを待ったが、偶然ちょうど振動限界の中心あたりで輝点が静止したため、ねじり秤の角度調節は成功とした。

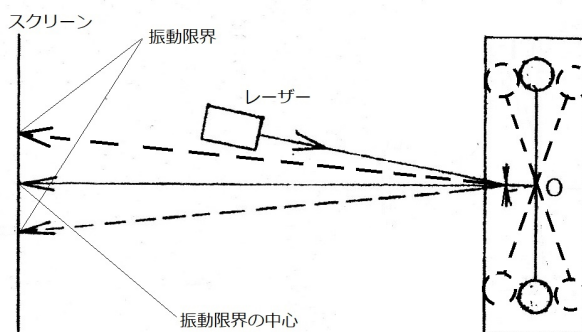


図 6: 角度調節

### 2.2.1 角度調節の正しい方法

もし、輝点の静止位置が振動限界の中心から、限界間隔の10%以上離れているならば、角度調節器を $\varphi$ 度だけ回す。Sを輝点の補正距離、Lをスケールと凹面鏡の距離とすると

$$\varphi = \frac{90S}{\pi L}$$

となる。吊り線がすでに半周以上ねじれてしまっているような場合を除き、角度調節器を回しすぎることをないように注意する。吊り線はリボン状であるため、ねじれているかどうかは、ルーペなどを用いれば見て確認することもできる。

## 2.3 ねじり秤について

### 2.3.1 剛体回転

任意の固定点に対する質点の角運動量  $J$  は運動量を  $p$ 、固定点-質点間距離を  $r$  とすると

$$J \equiv r \times p \equiv r \times Mv \quad (1)$$

と表せる。力  $F$  が質点に働くとき、固定点での力のモーメントは

$$N = r \times F \quad (2)$$

となる。(1) 式を微分すると

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt}(r \times p) = \frac{dr}{dt} \times p + r \times \frac{dp}{dt}$$

となるが

$$\frac{dr}{dt} \times p = v \times Mv = 0$$

であり、また、慣性座標系におけるニュートンの第2法則により

$$r \times \frac{dp}{dt} = r \times F = N$$

であるから

$$\frac{dJ}{dt} = N \quad (3)$$

となる。

### 2.3.2 ねじれ振動

ねじり秤はねじれ振動をする。このときねじり秤の回転軸まわりの慣性モーメントを  $I$  とすると、小鉛球の角運動量  $J$  は

$$J = I\omega \quad (4)$$

と表せる。 $\omega$  は角速度であり、回転角  $\theta$  の時間微分であるから

$$J = I \frac{d\theta}{dt} \quad (5)$$

$J$  を (3) 式に代入して

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = N \quad (6)$$

ここで、 $N$  はねじれ振動の復元力であり、ねじれ剛性率  $c$  を用いて

$$N = -c\theta \quad (7)$$

とできるため (6) 式は

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -c\theta \quad (8)$$

となり、これはねじれ振動の運動方程式である。これを变形すると

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{c}{I}\theta \quad (9)$$

ここで

$$\theta = \theta_{max} \sin \omega t \quad (10)$$

と置いて、両辺2回微分すると

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta_{max} \sin \omega t = -\omega^2 \theta \quad (11)$$

となる。(9)式と(10)式の右辺を比較すると

$$\omega^2 = \frac{c}{I} \quad (12)$$

であるから、ねじれ振動の振動周期をTすると

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{c}} \quad (13)$$

となる。これをねじり剛性率cについて变形すると

$$c = \frac{4\pi^2 I}{T^2} \quad (14)$$

となり、ねじり剛性率cはねじれ振動の振動周期を測定することで、求められることが分かる。



## 2.4 最終変位法

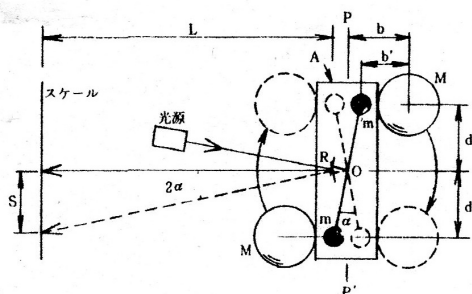


図 7: 最終変位法

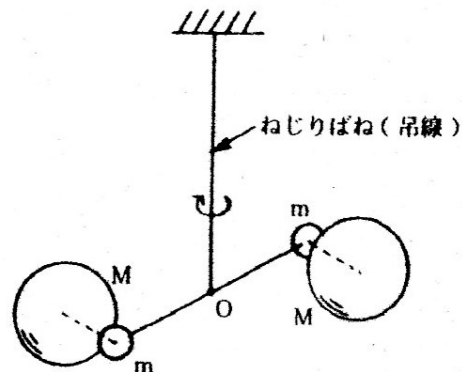


図 8: ねじり秤

最終変位法とは、ねじり秤の最終的な回転角から大小の鉛球間に働く引力の大きさをはかり、万有引力定数を算出する方法である。

図 1 のように、ねじり秤の回転軸を  $O$  とし、その下端から距離  $d$  だけ離れたところに質量  $m$  の小鉛球が回転軸  $O$  を中心として対称に 2 つある。回転軸  $O$  には、2 つの小鉛球を結ぶ腕と平行に凹面鏡  $R$  が付いている。この凹面鏡  $R$  にレーザーを反射させ、その反射光をスクリーンに映し、輝点の移動量  $S$  を測定することで、ねじり秤の微小な回転角  $\alpha$  を拡大して読み取ることができる。

ねじり秤はケースに入っているため、空気の対流の影響は受けない。図 1 に実線で示してあるように、ケースに密着させて、2 つの大鉛球  $M$  を回転軸  $O$  を中心として対称な位置におく。このとき、大小の鉛球の中心の高さはそろっていて、近接している大小の鉛球の中心を結ぶ線分はケースの厚みを等分する面  $P-P'$  と垂直に交わっている。この状態で、静かに放置するとねじり秤が静止し、そのときのスクリーン上の輝点の位置を記録する。このとき、図 1 では回転角を大きく表現しているが、実際には極めて小さく 2 つの小鉛球  $m$  はほぼ面  $P-P'$  上にあるため、2 組の小鉛球  $m$  と大鉛球  $M$  の間に働く万有引力  $F$  による偶力のモーメント  $N$  は

$$N = 2Fd \quad (15)$$

となる。

ねじり秤はこの状態でねじられて静止しているため、偶力のモーメント  $N$  とつり合う反対向きの回転モーメント  $N'$  が生じている。この後、大鉛球  $M$  を図 1 に点線で示してある回転対称の位置に移動させ、ねじり秤を静止させたときの回転角を  $\alpha$ 、吊り線のねじり剛性率を  $c$  とすると回転モーメントは

$$N' = c \cdot (1/2 \cdot \alpha) \quad (16)$$

と表せる。モーメントのつり合いから  $N = N'$  であるため

$$2Fd = c \cdot (1/2 \cdot \alpha) \quad (17)$$

したがって

$$F = \frac{c \cdot \alpha}{4d} \quad (18)$$

回転角  $\alpha$  はオプティカルレバーの原理によりスクリーン上の輝点の移動量  $S$  から測定する。凹面鏡  $R$  からスクリーンまでの距離を  $L$  とすると  $S/L = \tan 2\alpha \approx 2\alpha$  (回転角  $\alpha$  が微小角であるため)

$$\alpha = \frac{S}{2L} \quad (19)$$

吊り線のねじり剛性率  $c$  は、前述したようにねじれ振動の運動方程式  $I d^2\theta/dt^2 = -c\theta$  の振動周期  $T = 2\pi\sqrt{I/c}$  から求めるため

$$c = \frac{4\pi^2 I}{T^2} \quad (20)$$

ねじり秤の腕の質量を無視すると回転軸  $O$  まわりの慣性モーメント  $I$  は、 $I = 2md^2$  で表されるから

$$c = \frac{8\pi^2 md^2}{T^2} \quad (21)$$

(19) 式の  $\alpha$  と (21) 式の  $c$  を (18) 式に代入すると

$$F = \frac{1}{4d} \cdot \frac{8\pi^2 md^2}{T^2} \cdot \frac{S}{2L} = \frac{\pi^2 mdS}{T^2 L} \quad (22)$$

また、万有引力の法則では距離  $b$  だけ離れた質量  $M$  と  $m$  の物体間に働く万有引力  $F$  の大きさを

$$F = G \frac{Mm}{b^2} \quad (23)$$

と表せ、(22) 式と (23) 式から万有引力定数  $G$  は

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2 mdS}{T^2 L} &= G \frac{Mm}{b^2} \\ \therefore G &= \frac{\pi^2 b^2 dS}{MT^2 L} \end{aligned} \quad (24)$$

となる。よって、万有引力定数を求めるには大鉛球と小鉛球の中心間の距離  $b$  とねじり秤の腕の長さ  $d$ 、輝点の移動量  $S$ 、大鉛球の質量  $M$ 、ねじり秤の振動周期  $T$ 、凹面鏡からスクリーンまでの距離  $L$  をそれぞれ測定すればよい。

### 2.4.1 オプティカルレバーの原理

光でこの原理とも呼ばれ、鏡とスケールと望遠鏡などを図のように配置し鏡の回転角の微小変化を拡大して、より正確に変化量を測定するための方法である。

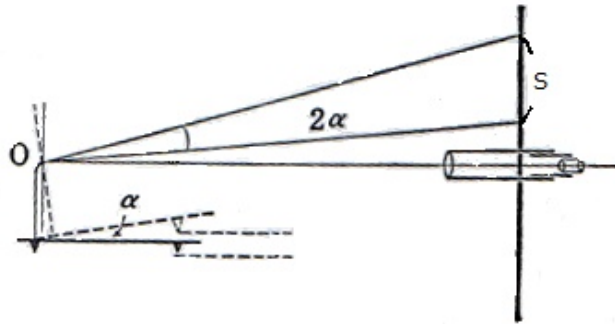


図 9: オプティカルレバーの原理

### 2.5 遠い側の大鉛球による万有引力 $f$ の影響

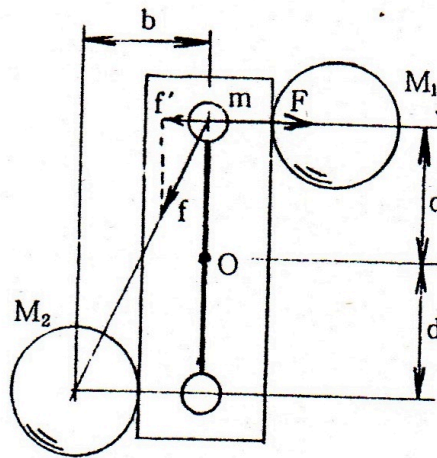


図 10: 万有引力  $f$  の影響

図 3 のように小鉛球  $m$  は近い方の大鉛球  $M_1$  と引き合うと同時にもう一方の大鉛球  $M_2$  とも引き合っている。そのため、(24) 式には補正が必要である。大鉛球  $M_2$  と小鉛球  $m$  の中心間の距離は

$\sqrt{b^2 + 4d^2}$  なので、大鉛球  $M_2$  による万有引力  $f$  の大きさは

$$f = G \frac{Mm}{b^2 + 4d^2} = \frac{b^2}{b^2 + 4d^2} F \quad (\because F = G \frac{Mm}{b^2}) \quad (25)$$

$f$  の  $F$  と反対向きの分力  $f'$  は

$$f' = f \frac{b}{\sqrt{b^2 + 4d^2}} \quad (26)$$

(26) 式に (25) 式を代入して

$$f' = \frac{b^3}{(b^2 + 4d^2)\sqrt{b^2 + 4d^2}} F = \beta F \quad (27)$$

式が煩雑になるため

$$\beta = \frac{b^3}{(b^2 + 4d^2)\sqrt{b^2 + 4d^2}} \quad (28)$$

とする。よって、実際に小鉛球に働く力は

$$(F - f') = (F - \beta F) = (1 - \beta)F \quad (29)$$

となり、(18) 式の  $F$  に代入すると

$$(1 - \beta)F = \frac{c \cdot \alpha}{4d} \quad (30)$$

したがって  $G$  の値は次のように補正される。

$$G = \frac{1}{1 - \beta} \cdot \frac{\pi^2 b^2 d S}{MT^2 L} \quad (31)$$

## 2.6 振動周期 T の測定方法

### 2.6.1 誤った方法

周期の測定方法として、輝点の位置を 15 秒間隔で記録していき、グラフを作成し、その振幅の極大値から周期を求める方法が取扱説明書に記載されていたが、10 分感も輝点の移動を観察するのは大変であったため、簡単のために独自で考えた方法により周期を測定した。その方法を示す。

まず、輝点の振動限界をスクリーンに記録し、その中心に輝点の軌跡と直行する線（指標線）を引く。輝点が振動限界に達することなく自由にねじれ振動をはじめてから、最初に指標線を通じた瞬間にストップウォッチをスタートさせた。その後、輝点が最初に通過したときと同じ向きに指標線を通ずるたびにストップウォッチのラップタイム機能を利用して、輝点が 1 往復するのにかかる時間を測定した。6 往復分の時間を測定し、1 往復にかかる時間を平均して求め、その時間をねじり秤の振動周期 T として用いた。

しかし、後から気が付いたのだが、この方法では実際の振動周期と同じような値は得られるが、正確な振動周期は測定できていない。振動限界の中心とねじり秤の振動中心が正確には一致していなかったためである。

### 2.6.2 正しい方法

振動周期が正確に測定できていないことに気づき、途中からは取扱説明書記載の方法により周期の測定を行った。その方法を示す。

ねじり秤を自由にしたのち、振動限界に達することなくねじれ振動を始めるのを待った。自由にねじれ振動が始まったら、ストップウォッチをスタートさせ、10 秒間隔で輝点の位置を記録した。そのデータをもとにして、輝点の位置を縦軸に、時間を横軸にとったグラフを作成し、極大点の間隔を振動周期 T として用いた。

## 2.7 その他各種測定

### 2.7.1 大小の鉛球間の距離 b

距離 b を直接測定することは不可能なので、ケースの厚みと大鉛球の直径をノギスで測って、それらの和の半分を距離 b の値として用いた。実際の測定値は以下に示す。

ケースの厚み : 0.0292 m

大鉛球の半径 : 0.063 m

$$b = (0.0292 + 0.063) / 2 = 0.0461 \text{ (m)}$$

熱膨張などによる距離 b の変化はないものと考え、常にこの値を用いた。

### 2.7.2 ねじり秤の腕の長さ $d$

ねじり秤の腕の長さは回転中心から小鉛球の中心までの距離である。腕の全長と小鉛球の直径をそれぞれノギスで測る。全長の半分の長さから小鉛球の半径を引いた値を腕の長さ  $d$  とした。実際の測定値は以下に示す。

腕の全長 : 0.114 m

小鉛球の半径 : 0.014 m

$$d = (0.114) / 2 - (0.014) / 2 = 0.05 \text{ (m)}$$

距離  $b$  と同様に、熱膨張などによる距離  $d$  の変化はないものと考え、常にこの値を用いた。

### 2.7.3 輝点の移動量 $S$

ねじり秤が自由な状態で、大鉛球設置後はじめの輝点静止位置を記録したのち、鉛球旋回台を回転させ、大鉛球を回転対称の位置へ移動する。次の輝点静止位置を記録し、2地点間の距離を輝点の移動距離とした。測定には木製の 1m 物差しを用いた。

### 2.7.4 大鉛球の質量 $M$

電子天秤を用いて、二つの鉛球の質量を測り、その平均値を大鉛球の質量  $M$  とした。実際の測定値は以下に示す。

$$M = 2959.8 / 2 = 1479.9 \text{ (kg)}$$

大鉛球の質量は基本的に変化しないと考えられるため、常にこの値を用いた。

### 2.7.5 凹面鏡からスクリーンまでの距離 $L$

レーザー距離計の底面をスクリーンに水平につけ、レーザーがスクリーンに対して垂直になるようにした。その状態で、レーザーが凹面鏡に入射する位置にレーザー距離計を移動させ、測定することで、距離  $L$  を測定した。

### 3 結果と試行錯誤

#### 3.1 誤った周期測定での測定結果

前述した、6 往復分の時間を測定し、その平均値を振動周期  $T$  として用いる方法で得られた結果を表にまとめた。

	振動周期 $T$ (s)	輝点の移動量 $S$ (m)	投影距離 $L$ (m)	万有引力定数 $G \times 10^{-11}$ ( $\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^2$ )	真値との差 (%)
1 回目	585.63	0.0745	2.024	8.21	22.98
2 回目	575.77	0.0705	2.026	8.03	20.28
3 回目	582.83	0.0780	2.022	8.68	30.13
4 回目	582.22	0.0740	2.020	8.27	23.84

表 1: 測定結果 1

どの結果を見ても真値より 30 % 程度以上大きい数値が得られる結果となった。

#### 3.2 距離 $b$ の補正 1

表 1 の結果から、測定値に最大で 10 % 程度のばらつきがあるものの、総じて真値より 20 % 程度の系統誤差が生じていると考えられる。その原因として大小の鉛球間の距離  $b$  の変化が考えられる。距離  $b$  は大小の鉛球が引き合う前の鉛球間の距離としてケースの厚みと大鉛球の直径から理論的に求めているが、大小の鉛球が引き合った後の鉛球間の距離  $b'$  は距離  $b$  よりも小さくなる。そこで、距離  $b$  の補正を行った。大小の鉛球が引き合って近づく距離はねじり秤の腕の長さ  $d$  と回転角  $\alpha$  を用いて

$$d(1/2 \cdot \alpha) \quad (32)$$

と表せ、オプティカルレバーの原理により、

$$b' = b - d(1/2 \cdot \alpha) = b - d \cdot S/4L \quad (33)$$

となる。距離  $b$  を距離  $b'$  に補正すると表 1 の結果は以下ようになる。

	振動周期 $T$ (s)	輝点の移動量 $S$ (m)	投影距離 $L$ (m)	距離 $b'$ (m)	万有引力定数 $G \times 10^{-11}$ ( $\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^2$ )	真値との差 (%)
1 回目	585.63	0.0745	2.024	0.04564	8.04	20.54
2 回目	575.77	0.0705	2.026	0.04567	7.88	18.02
3 回目	582.83	0.0780	2.022	0.04562	8.50	27.42
4 回目	582.22	0.0740	2.020	0.04564	8.10	21.39

表 2: 測定結果 1 での距離  $b$  の補正結果

距離  $b$  の補正による真値との差の縮まりは 2 % 程度で、系統誤差として大きな原因ではないことが分かった。

### 3.3 正確な周期測定での測定結果

振動周期の測定方法の誤りに気づき、前述した正しい方法で振動周期を測定した。記録した、輝点の時間変化の表とそれによって得られたグラフの一例を以下に示す。

時間 (s)	位置 (mm)	時間 (s)	位置 (mm)	時間 (s)	位置 (mm)	時間 (s)	位置 (mm)	時間 (s)	位置 (mm)
0	675	130	505	260	191	390	245	520	522
10	679	140	478	270	177	400	265	530	539
20	679	150	451	280	169	410	286	540	551
30	676	160	424	290	162	420	307	550	563
40	670	170	396	300	158	430	331	560	574
50	661	180	367	310	156	440	354	570	581
60	650	190	340	320	159	450	377	580	587
70	636	200	314	330	164	460	400	590	590
80	618	210	289	340	173	470	423	600	590
90	599	220	265	350	183	480	445	610	589
100	577	230	244	360	195	490	467	620	585
110	555	240	224	370	210	500	486	630	581
120	530	250	206	380	226	510	505	640	574

表 3: ねじれ振動による時間と輝点の位置関係

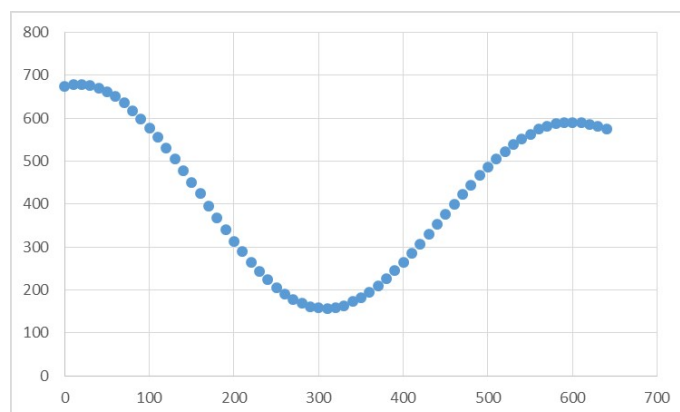


図 11: 輝点の時間-位置グラフ



これにより以下の結果が得られた。

	振動周期 T (s)	輝点の移動量 S (m)	投影距離 L (m)	距離 b' (m)	万有引力定数 $G \times 10^{-11} \text{ (m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^2)$	真値との差 (%)
5回目	585	0.0698	1.93	0.04565	7.92	18.73

表 4: 正確な周期測定の結果

### 3.4 距離 L の補正

凹面鏡からスクリーンまでの距離 L はその最短距離を測定した値を用いていたが、凹面鏡で反射されたレーザー光が進む経路はスクリーンまでの最短経路ではない。そのため、距離 L の補正が必要であると考えた。

まず、凹面鏡で反射されたレーザー光が最短経路でスクリーンに入射した場合の位置をスクリーンにプロットする。この地点を点 X とする。次に最終変位法での輝点の移動量は 7 cm 程度であるが、2 地点ある輝点の静止位置のうち、点 X に近い方の点を点 X' とし、点 X-点 X' 間の距離 l を測定し、三平方の定理により凹面鏡と点 X' 間の距離 L' を求め、凹面鏡とスクリーン間の距離として用いることにした。

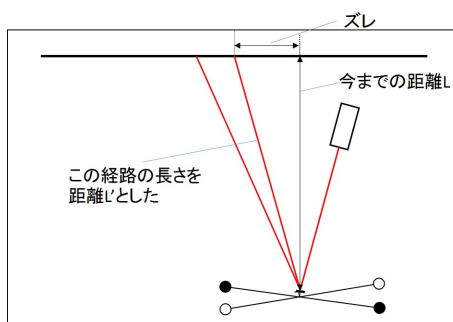


図 12: 距離 L の補正

正確な周期測定の結果に距離 L' への補正を行うと以下ようになった。距離 l を測定すると 0.41 m であった。

$$L' = \sqrt{L + l} = \sqrt{1.93^2 + 0.41^2} \approx 1.973 \quad (34)$$

	振動周期 T (s)	輝点の移動量 S (m)	投影距離 L' (m)	距離 b' (m)	万有引力定数 $G \times 10^{-11} \text{ (m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^2)$	真値との差 (%)
5回目	585	0.0698	1.973	0.04565	7.75	16.19

表 5: 距離 L' への補正

### 3.5 装置の不具合

#### 3.5.1 ケース面の修理

系統誤差の大きな原因がなかなか分からず装置を眺めていると、一方の大鉛球がケースに密着しているのに対し、もう一方の大鉛球がケースから1,2mm程度離れていることに気づいた。密着させようとしても片方がすでに密着しているため、旋回台をそれ以上回すことができない状態であった。原因を探るべく装置をよく観察すると、ダンパーそうと油溜めをつないでいる、油が通るための管がケース面を内側から圧迫して、ケース面が片面だけ、外側に歪んでいた。そのため、管の向きをケース側面からまっすぐに出るようにし、ケース面をビニールテープで押さえつけた。テープは大鉛球とは接触しない位置につけた。



図 13: ケース修理前

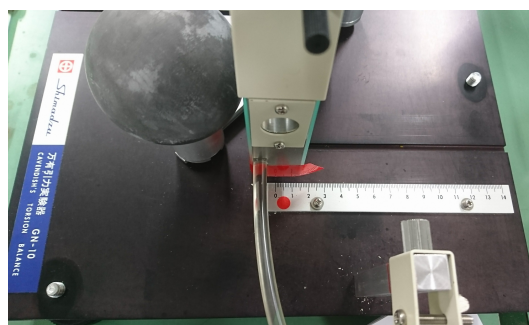


図 14: ケース修理後

簡素ではあるがケースの修理をすると大鉛球とケース面間の隙間が目立たなくなった。

#### 3.5.2 凹面鏡の角度調整

さらに、ねじり秤をよく観察すると、凹面鏡がねじり秤の腕に対して若干角度をつけて取り付けられており、平行ではないことが分かった。なぜ平行にしていないのか理由がわからなかったが、平行にしてみようと考えた。凹面鏡は回転軸に金属の金具で取り付けられており、ラジオペンチで金具を曲げて、凹面鏡の角度ができるだけ腕と平行になるようにしてみた。

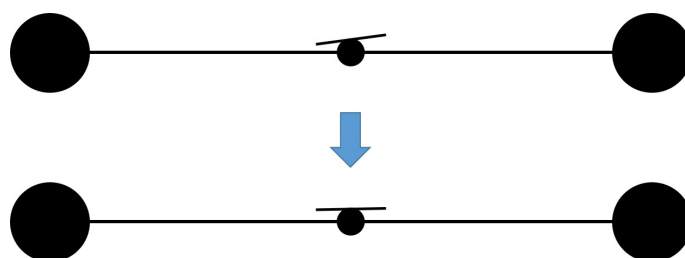


図 15: 凹面鏡の角度調整

### 3.5.3 装置修理後の測定

ケース面の修理と凹面鏡の角度調整後、再度実験を行った。

ケース面の修理では、大小の鉛球間の距離を若干縮めることができたため、小鉛球にはより大きな万有引力が働き、回転角が大きくなり、輝点の移動量が増加すると予想された。その結果を以下に示す。

	振動周期 T (s)	輝点の移動量 S (m)	投影距離 L' (m)	距離 b' (m)	万有引力定数 G × 10 <sup>-11</sup> (m <sup>3</sup> kg <sup>-1</sup> s <sup>2</sup> )	真値との差 (%)
6 回目	590	0.064	1.962	0.04568	7.04	5.48

表 6: 装置修理後の測定

予想に反し、輝点の移動量は小さくなり、その影響で、万有引力定数の値が今まで得られていた数値と比較して小さくなった。ケースの修理と同時に行った凹面鏡の角度調節が原因ではないかと考えられるが、凹面鏡の角度を腕に対して水平にすることで、どのような影響があるかは分からない。

### 3.6 鉛球支持管の影響

本実験では、大鉛球の位置を逆転させることで、大鉛球による小鉛球に働く万有引力の向きを逆転させ、それによるねじり秤の最終的な回転角から大小の鉛球間に働く万有引力の大きさを求めている。しかし、実験では、旋回台を回すことで大鉛球の位置を逆転させており、このとき、大鉛球の位置以外に、旋回台と鉛球支持管の位置も逆転している。つまり、実際には、大小の鉛球間に働く万有引力 F のほかに小鉛球と旋回台、小鉛球と鉛球支持管の間にそれぞれ働く。旋回台の質量を測定することは不可能と判断し、鉛球支持管による影響のみを考えることにした。そこで、鉛球支持管と小鉛球との間に働く万有引力 F' の大きさを概算した。

鉛球支持管 2 つの平均質量は 0.018 kg で鉛球支持管と小鉛球の中心間の距離はおよそ 0.066 m であった。この距離については概算のため正確には測定していない。鉛球支持管と小鉛球の中心を結ぶ直線は水平に対して 45 度程度傾いていたため、F' は以下のように概算される。万有引力定数を G、小鉛球の重さを m とする。

$$F' = G \frac{0.018 \times m}{0.066^2} \cos \pi/4 \approx 2.1 \times Gm \quad (35)$$

大小の鉛球間に働く万有引力の大きさ F を概算すると

$$F = G \frac{1.48 \times m}{0.046^2} \approx 700 \times Gm \quad (36)$$

となり F に対して F' は十分に小さく鉛球支持管による影響はほとんどないと考えられる。

## 4 まとめ

本研究では、初期段階での測定の結果より、測定値に含まれる系統誤差の原因を解明するとともに、真値との差 10 % 以内での測定を目指していた。

距離などの測定値の補正について考察し、2～3% 程度の系統誤差の原因をいくつか解明することができた。さらに、凹面鏡の角度調節により、測定値が大幅に真値へ近づいたため、光学系の不具合が系統誤差の大きな原因である可能性を発見した。

本研究で最終的に得られた測定値は、 $G = 7.04 \times 10^{-11}$  で、真値との差は 5.48 % であった。

本研究の今後の展望として、測定値のさらなる補正について、理論的な光学系の調整について、それぞれ考察を行い、キャベンディッシュの実験同様、真値との差 1 % 程度の精度での実験方法を検討することを考えている。

## 5 現代宇宙論の理解へ向けて

### 5.1 重力波検出について

現代宇宙論のホットな話題として、重力波の検出がある。

重力波とはもともとアインシュタインの一般相対性理論によってその存在が予言されていた。しかし、重力波による影響はとても小さく、直接観測することは困難だとアインシュタインは考えていた。

ワイスらが、万有引力定数の高精度で測定を可能としたレーザー干渉計を用いて、マイケルソンがエーテルの存在を証明するための実験に用いたマイケルソン干渉計を改良した、ファブリ・ペロー干渉計を利用して基線長4kmの重力波検出器を開発し、2015年9月にブラックホール衝突の際に生じた重力波の直接検出に成功した。

これは、一般相対性理論の重要な裏付けとなった。

### 5.2 万有引力定数と現代宇宙論

現代宇宙論の目的である「宇宙の起源や宇宙全体の構造などを解明する」ために、重力場について記述するアインシュタイン方程式は重要な役割を担っている。そのアインシュタイン方程式で、物質の存在や運動を記述する項の定数として、万有引力定数は用いられている。

現代宇宙論は重力波検出などにもみられるように、観測技術とともに発展してきた。そのため、現代宇宙論の理解へ向けて、微小な値の極めて精度の高い測定が求められる実験技術の獲得は重要な課題である。その導入として、キャベンディッシュの方法での万有引力定数の測定を自身の手で行うことは、とても有意義であると考えられる。

## 6 謝辞

本研究を進めるにあたり数多くの助言や知識を授けてくださった高嶋先生、多くの時間を共にした同研究室学部生の大塚君と村田君、並びに理科領域専攻の皆様、論文の執筆について  $\text{\LaTeX}$  での記述方法などを教えてくださった同研究室大学院生の家田さん、しばしば進展状況を気にかけて下さった同研究室大学院生の山下さん、研究の活力を与えてくださった男子女子ハンドボール部の皆様、活を入れてくれた友人たちにはとても感謝しています。ありがとうございました。

## 参考文献

- [1] 鈴木秀次 『バークレー物理学コース付 実験物理下』 丸善株式会社
- [2] 奥田毅 『実験物理の歴史』 株式会社内田老鶴圃新社
- [3] 『万有引力実験器 GN-10 取扱説明書』 島津理化器械株式会社
- [4] 吉田卯三郎・橘芳實・武居文助・武居文雄 『六訂 物理学実験』 三省堂
- [5] 万有引力定数 CODATA2014 推奨値  
(URL [https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?bg|search\\_for=constant+of+gravitation](https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?bg|search_for=constant+of+gravitation)) (2018/2/04)
- [6] 今井功 『バークレー物理学コース1 力学上』 丸善株式会社
- [7] 今井功 『バークレー物理学コース1 力学下』 丸善株式会社