湯川ポテンシャル原子核が $\rho(\boldsymbol{r})$ の分布関数を持つ場合に中間子の波動方程式はシュレディンガー方程式に似た感じで次のように書けるとする。

$$(\nabla^2 - m^2)\phi(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})$$

この方程式の解を求めるときには以下の式を満たすプロパゲーター $G(\boldsymbol{r})$ を求めておくと便利である。

$$(\nabla^2 - m^2)G(\boldsymbol{r}) = \delta^3(\boldsymbol{r})$$

この $G(\boldsymbol{r})$ をフーリエ積分によって表しておくと、実際にフーリエ変換を行って求めることができる。つまり、

$$G(\boldsymbol{r}) = \int G(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} d^3\boldsymbol{k}$$

この式に $\nabla^2 - m^2$ を作用させたものがつぎのデルタ関数に等しいことから

$$\delta^3(\boldsymbol{r}) = \frac{-1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} d^3\boldsymbol{k}$$

$G(\boldsymbol{k})$ は $-1/(2\pi)^3(k^2+m^2)$ であることがわかる。これから実際に $G(\boldsymbol{r})$ を求めると以下のような計算を行なうことになる。

$$G(\boldsymbol{r}) = \frac{-1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{k^2+m^2} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} d^3\boldsymbol{k} = \frac{-1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} k^2 \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \frac{exp(ikr\cos\theta)}{k^2+m^2}$$

$$G(\boldsymbol{r}) = \frac{-1}{(2\pi)^2 ir}\int_0^{\infty} \frac{k}{k^2+m^2}(e^{ikr} - e^{-ikr})dk = \frac{-1}{(2\pi)^2 ir}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ke^{ikr}}{k^2+m^2}dk$$

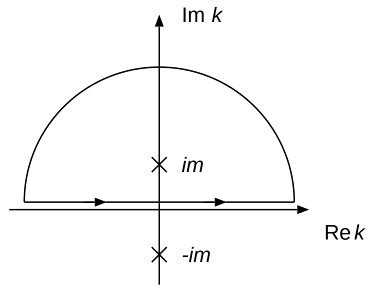

図 1: 積分経路を示す図

また複素関数では積分は留数 $\mathrm{Res}[f(z), a]$ というものに関係している。

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}[f(z), a]$$

ここで a が n 位の極ならば以下のようになる。

$$\mathrm{Res}[f(z), a] = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n f(z)\}$$

これから $z = im$ で 1 位の極を持つことになり

$$G(\boldsymbol{r}) = \frac{-1}{(2\pi)^2 ir}\frac{(2\pi i)(im)e^{-mr}}{2im} = \frac{-e^{-mr}}{4\pi r}$$