相対論

相対論は特別な静止系は存在しないはずという推論から始まる。x 方向に速度 v で移動する座標系の時空点 (x', t') と静止系の時空点 (x, t) は以下のような対応関係があると考えられる。

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

x 軸方向に動く座標系の y 方向に働く力を考えてみよう。動いている物体に載ってみると力の働く時間が動いている座標毎に違うことになる。y 方向の力は同じなので y 方向の運動が同じであるためには質量を時間の延びの分だけ増やしてやればどの座標系でも静止系と同じように y 方向に動くことになる。これによって運動量の定義も変更を受けることになる。

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

非相対論と同じように速度 0 から速度 v まで加速するのに必要な仕事を計算してやると速度 0 においてもエネルギーが存在すると考えるのに都合の良い表現が得られる。

$$\begin{aligned} W &= \int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \cdot \boldsymbol{v} dt = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) \cdot \boldsymbol{v} \\ &= \int \left[\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \cdot \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} dt + m\frac{dv}{dt}\frac{v^3}{c^2} \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right)^{-3/2} \right] dt \end{aligned}$$

ここで

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{dv}{dt} v$$

を利用すると

$$W = \int_0^v \frac{mv}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{dv}{dt} dt = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) dt = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - mc^2$$