

2.3 電磁誘導と電磁波 補充プリント

ガウスの定理

空間に蛇口のある流れのようなベクトル場 $\mathbf{i}$ があるとする。図のような微小立体からのわきだしを求めよ。

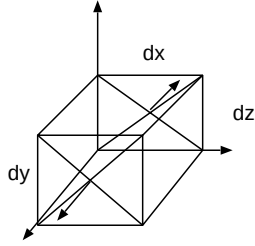


図 1: y-z 面に平行な面からのわきだし (ダイバージェンス)

この図で y-z 面に平行な面からの x 方向へのわきだしは以下ようになる。

$$i_x(x + \Delta x, y, z)dydz - i_x(x, y, z)dydz = \frac{\partial i_x}{\partial x} dx dy dz$$

他の面からのわきだしを加えて全体からのわきだしは以下ようになる。

$$\text{div} \mathbf{i} dv = \left(\frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} + \frac{\partial i_z}{\partial z} \right) dx dy dz$$

わきだした流れは隣の面を通して出て行くので以下の式が成り立つ。

$$\int_v \text{div} \mathbf{i} dv = \int_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}$$

ストークスの定理

磁場がある空間の、x-y 平面上において、微小閉回路の渦の大きさ（経路積分）をもとめよ。ただし、微分で求めるときは、始点と終点の平均を取ること。積分表示のときは x 方向と、y 方向を別に積分表示すると良い。

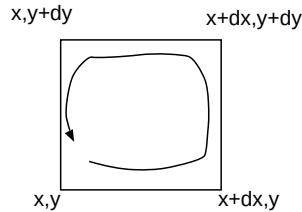


図 2: 回転（ローテーション）の z 成分の計算

面積 $dx dy$ での x 方向の回転の経路積分を計算すると次のようになる。

$$\frac{H_x + H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx}{2} dx - \frac{H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy + H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy}{2} dx = -\frac{\partial H_x}{\partial y} dx dy$$

y 方向の回転の経路積分を計算すると次のようになる。

$$\frac{H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx + H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy}{2} dy - \frac{H_y + H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy}{2} dy = \frac{\partial H_y}{\partial x} dx dy$$

この計算を面積 $dydz$ 、 $dzdx$ について行ない次のベクトルを定義する。

$$\text{rot}\mathbf{H} \equiv \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

微小面積ベクトル $d\mathbf{S}$ は実際には次のベクトルである。

$$d\mathbf{S} = (dydz, dzdx, dxdy)$$

この微小面積ベクトルの回りの磁場の回転の経路 s の積分は記号 $\text{rot}\mathbf{H}$ と微小面積ベクトル $d\mathbf{S}$ を使うと以下のように表現される。

$$\int_s \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \text{rot}\mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$$

次に微小経路 s とは別に普通の経路 s' を考える。経路 s' を縁にもつ任意の曲面 S の上ににたくさん微小経路 s があるとすると、隣り合う経路は向きが逆なので、経路積分の足し算をするとすべて打ち消しあう。したがって以下の関係式が成り立つ。

$$\int_{s'} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \text{rot}\mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$$

この関係式をストークスの定理と呼ぶ。

ガウスの定理、ストークスの定理と電荷の保存の式を使うとマックスウェル方程式を導くことができる。この電磁場の方程式の意味するところは、電荷があるとどんな力が働くかに関係して導入された真空の誘電率 ϵ_0 と、並行に電流がながれる時どのような力が働くかに関係して導入された真空の透磁率 μ_0 の間にはある関係式があるということである。教科書の図の 2.62 のような波はマックスウェル方程式を満たしているが、この時この電磁波の伝搬速度を c とすると以下の関係が導かれる。

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

光の速度は 1849 年にフィゾーが測定していた。この関係式から電磁波が光の速度に等しいことが 1864 年にマックスウェルによって示された。これから電磁気学における意味のある物理定数は光速のみであることがわかる。

この後、最初の素粒子である電子が真空放電の陰極から発生する粒子の流れであることが 1897 年に J.J. トムソンによって実証され、質量に対する電荷の比 e/m が計測された。その前後の物理学の展開については良い参考書がある。[1]

参考文献

- [1] 電子と原子核の発見（20 世紀の物理学を築いた人々）スティーブン・ワインバーグ著、本間三郎訳、日経サイエンス社（1986）