0. 数学的準備 2

[0] はじめに

いくつかのことを知っていると、数学はとても分かりやすいものである。自分で考えてみよう。

[1] マクローリン展開

マクローリン展開とは

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \cdots$$

これは

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x}$$

であることを考えると自然なことである。マクローリン展開を x の 2 次で打ち切って x で微分し 2 次導関数が定義どうりになることを見れば良い。

[2] 指数関数

指数関数の導関数が自分自身になることを確かめておくと良い。

$$(e^x)' = \lim_{x \to \Delta x} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

以下のことを思い出せばこれが e^x であることはわかる。先に Δx が小さい事の近似を使うのがコツ。

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

[3] 三角関数

この導関数は、加法定理を使えば以下のようなり、マクローリン展開を得る。

$$(\sin(x))' = \lim_{x \to \Delta x} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} = \cos x$$

また、解析概論 (高木貞治著)p191 では $\sin(x)$ を以下のように表現して、マクローリン展開を得ることが出来ることが説明されている。逆関数の導関数は関数の導関数の逆数であることを使う。

$$\theta = \sin^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt$$

これを眺めるだけで $(\sin(x))' = \cos x$ であることが分かる。また何故この式が成り立つかは、円弧の長さを求める以下の式から説明できる。ただし $y = \sqrt{1 - t^2}$。

$$\theta = \int_0^x \sqrt{1 - y'^2} dt$$