Rutheford 散乱 その 2

双曲線軌道

ラザフォード散乱をする粒子の軌道は双曲線となることが知られている。つぎの軌道の方程式が成り立つとする。

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

漸近線の傾きは b/a で b はインパクトパラメータ、点 $(c, 0)$ は焦点をあらわす。また $b^2 = c^2 - a^2$ となる。

参考書のように漸近線と x 軸の成す角を ϕ とすると以下の式が成り立つ。s は入射粒子と原子核の最短距離とする。

$$s = c + a = c(1 + a/c) = c(1 + \cos\phi)$$

以下のふたつの式と併せてインパクトパラメーターと散乱角の関係を求めよ。

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_0^2}{2m} + \frac{z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 s}$$

$$L = pb = p_0 s$$

ただしインパクトパラメーターと散乱角 θ の関係は以下のようになる。

$$b = \frac{z_1 Z_2 e^2}{8\pi\varepsilon_0 E}\tan\phi = \frac{z_1 Z_2 e^2}{8\pi\varepsilon_0 E}\cot\frac{\theta}{2}$$

微分断面積

微分断面積は以下の式なることを示せ。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{z_1 Z_2 e^2}{16\pi\varepsilon_0 E}\right) \cdot \sin^{-}4\frac{\theta}{2}$$

ただし $d\sigma = p(\theta)d\theta = 2\pi b|db|$ であるとする。ある領域にはいるとある角度領域にいくということから、一個の粒子がある立体角にいく面積 というかたちに介錯することが出来る。断面積がちいさい場合は反応する数は $\sigma \times n_{in} n_{target} = \sigma \times n_{in}\rho N_0 d/A$ となる。